ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σεπτέμβριος 2019

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>Θέμα</u> 1 : α) Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, να αποδειχτεί ότι

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

για κάθε φυσική νόρμα $\|\cdot\|$.
β) Αν $Q \in R^{n,n}$ ορθογώνιος πίνακας και $A \in R^{n,n}$, να αποδείξετε ότι

$$\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2.$$

<u>Θέμα</u> 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, βέλτιστη SOR και η βέλτιστη μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel.

<u>Θέμα</u> 3 : α) Να αποδείξετε ότι δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k)}$ και $r^{(k+1)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια.
β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχτεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος και να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
(Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

<u>Θέμα</u> 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

και $b = (1 \ -1 \ \ 5 \ \ 0)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

<u>Θέμα</u> 5 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (0 \ 1 \ 0)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την LU παραγοντοποίηση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)